PART4　指数関数を含む方程式・不等式

例題

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$2^{x-2}=64$　　(ii)　$9^{x}-7\cdot 3^{x}-18=0$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}>2^{-2x+1}$　　(ii)　$5^{2x+1}+4\cdot 5^{x}-1<0$

Point Pickup

練習

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\dfrac{1}{9^x}=27$　　　(ii)　$2^{2x}-2^{x+1}-48=0$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{125}\right)^{x-1}$　　　(ii)　$9^x-2\cdot3^x-3>0$

第11講　PART4 確認問題

次の方程式を解け。

1 $\dfrac{1}{27^x}=9$

$x=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

2 $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}-16=0$

$x=\boxed{\text{エ}}$

次の不等式を解け。

3 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}<\left(\dfrac{1}{32}\right)^{x+1}$

$x<\boxed{\text{オカ}}$

4 $25^x-4\cdot 5^x-5>0$

$x>\boxed{\text{キ}}$

PART4　指数関数を含む方程式・不等式

例題

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$2^{x-2}=64$　　(ii)　$9^x-7\cdot 3^x-18=0$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\left(\frac{1}{2}\right)^x>2^{-2x+1}$　　(ii)　$5^{2x+1}+4\cdot 5^x-1<0$

(1) (i)　$2^{x-2}=64$　より　$2^{x-2}=2^6$　よって　$x-2=6$　したがって　$x=8$

(ii)　$9^x=(3^2)^x=3^{2x}=(3^x)^2$ であるから，与えられた方程式を変形すると

$$(3^x)^2-7\cdot 3^x-18=0$$

$3^x=t$ とおくと $t>0$ であり

$$t^2-7t-18=0 \qquad (t+2)(t-9)=0$$

$t>0$ であるから　$t=9$

よって　$3^x=9$　より　$3^x=3^2$　したがって　$x=2$

(2) (i)　$\left(\frac{1}{2}\right)^x>2^{-2x+1}$　より　$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$x<2x-1$　したがって　$x>1$

(ii)　$5^{2x+1}=5\cdot 5^{2x}=5\cdot(5^x)^2$ であるから，与えられた不等式を変形すると

$$5\cdot(5^x)^2+4\cdot 5^x-1<0$$

$5^x=t$ とおくと $t>0$ であり

$$5t^2+4t-1<0 \qquad (5t-1)(t+1)<0$$

$t+1>0$　より　$5t-1<0$　$t<\frac{1}{5}$

よって　$5^x<\frac{1}{5}$　より　$5^x<5^{-1}$

底 5 は 1 より大きいから　$x<-1$

練習

(1)　次の方程式を解け。

(i)　$\dfrac{1}{9^x}=27$　　(ii)　$2^{2x}-2^{x+1}-48=0$

(2)　次の不等式を解け。

(i)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{125}\right)^{x-1}$　　(ii)　$9^x-2\cdot3^x-3>0$

(1) (i)　$\dfrac{1}{9^x}=27$　より　$3^{-2x}=3^3$　よって　$-2x=3$　したがって　$x=-\dfrac{3}{2}$

(ii)　与えられた方程式を変形すると

$$(2^x)^2-2\cdot2^x-48=0$$

$2^x=t$ とおくと $t>0$ であり

$$t^2-2t-48=0\qquad(t+6)(t-8)=0$$

$t>0$ であるから　$t=8$

よって　$2^x=8$　より　$2^x=2^3$　したがって　$x=3$

(2) (i)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{125}\right)^{x-1}$　より　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x-3}$

底 $\dfrac{1}{5}$ は0より大きく1より小さいから　$2x+1>3x-3$　したがって　$x<4$

(ii)　与えられた不等式を変形すると

$$(3^x)^2-2\cdot3^x-3>0$$

$3^x=t$ とおくと $t>0$ であり

$$t^2-2t-3>0\qquad(t+1)(t-3)>0$$

$t+1>0$　より　$t-3>0$　$t>3$

よって　$3^x>3$

底3は1より大きいから　$x>1$

第 11 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：3

[解説]

$\dfrac{1}{27^x}=9$　より　$3^{-3x}=3^2$ [A]

よって　$-3x=2$

したがって　$\boldsymbol{x=-\dfrac{2}{3}}$

> [A]　指数関数を含む方程式
> 「底」を揃えて，指数の性質
> $a>0$，$a\neq 1$ のとき
> $p=q \Longleftrightarrow a^p=a^q$
> を利用する。

2

[正解] エ：3

[解説]

与えられた方程式を変形すると

$$(2^x)^2-6\cdot 2^x-16=0$$

$2^x=t$ とおくと $t>0$ であり [B]

$$t^2-6t-16=0$$

$$(t+2)(t-8)=0$$

$t>0$ であるから　$t=8$

よって　$2^x=8$　より　$2^x=2^3$ [C]

したがって　$\boldsymbol{x=3}$

> [B]　$a^x=t$ と置き換えて t の 2 次方程式を導く。
> t のとりうる値の範囲に注意する。

> [C]　指数関数を含む方程式
> 「底」を揃えて，指数の性質
> $a>0$，$a\neq 1$ のとき
> $p=q \Longleftrightarrow a^p=a^q$
> を利用する。

3

[正解] オカ：-2

[解説]

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}<\left(\dfrac{1}{32}\right)^{x+1}$　より　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+5}$ [D]

底 $\dfrac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$$2x-1>5x+5$$

$$-3x>6$$

よって　$\boldsymbol{x<-2}$

> [D]　指数関数を含む不等式
> 「底」を揃えて，指数関数の大小に関する性質
> ・$a>1$ のとき
> $p<q \Longleftrightarrow a^p<a^q$
> ・$0<a<1$ のとき
> $p<q \Longleftrightarrow a^p>a^q$
> を利用する。

4 [正解] キ：1

[解説]

与えられた不等式を変形すると

$$(5^x)^2-4\cdot5^x-5>0$$

$5^x=t$ とおくと $t>0$ であり [E]

$$t^2-4t-5>0$$

$$(t+1)(t-5)>0$$

$t+1>0$ より

$$t-5>0$$

$$t>5$$

よって　$5^x>5$

底 5 は 1 より大きいから [F]

$$\boldsymbol{x>1}$$

[E]　$a^x=t$ と置き換えて t の 2 次不等式を導く。
t のとりうる値の範囲に注意する。

[F]　指数関数を含む不等式
「底」を揃えて，指数関数の大小に関する性質
・$a>1$ のとき
　$p<q \iff a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
　$p<q \iff a^p>a^q$
を利用する。